Principe de récurrence et suites

I) Raisonnements par récurrence

Relations de récurrence

Exercice 1 Pour chaque relation de récurrence, donner, sans justifier, une expression de u_n en fonction de n et de son premier terme.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a + u_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = bu_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n + 1 + \frac{1}{n+1}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n + 1 - \frac{1}{n+1}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Algèbre

Exercice 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ tels que
$$(1+\sqrt{2})^n = x_n + y_n\sqrt{2},$$
et qu'ils vérifient $\quad x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$.
2. ★ Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers a_n, b_n tels que $\quad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que si $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, alors $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, pour tout entier n. Donner un exemple d'un tel réel x.

Arithmétique

Exercice 6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5 \mid 2^n + 4 \times 7^n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n\, 3^{n+2}$.

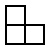
Exercice 7 ★ Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier divisible par 2^n dont les chiffres décimaux ne sont que des 1 et des 2.

Inégalités

Exercice 8 Montrer l'inégalité de Bernoulli : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 9 ★ Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$ tels que $a_1, \ldots, a_n = 1$. Montrer que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

Autres

Exercice 10 On considère un échiquier de taille $2^n \times 2^n$, avec $n \geq 1$. Montrer que si on retire n'importe quelle case de celui-ci, on peut paver le reste de l'échiquier avec des triominos en L comme .

Exercice 11 Soit $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$. On suppose que $f(2) = 2$, que f est complètement multiplicative, c'est-à-dire $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ f(mn) = f(m)f(n)$ et que f est strictement croissante. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n$.

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $n!$ peut s'écrire comme la somme de n de ses diviseurs.

bis repetita

Exercice 13 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Q}_+^*$, montrer qu'il n'existe un nombre fini de solutions à l'équation
$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = a,$$
d'inconnues $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 Un domaine rectangulaire quadrillé $n \times m$ représente un bac à sable. Initialement, chaque case contient une quantité entière de sable. À chaque étape, on peut choisir une des cases du domaine contenant au moins quatre unités de sable, et répartir une unité sur chaque voisin de la case. Le sable sortant du domaine est perdu.

1. Montrer qu'au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient une configuration finale, où plus aucune opération n'est possible.
2. ★ Montrer que la configuration finale ne dépend pas des étapes choisies.

Exercice 15 ★ Soient $(x_1, \ldots, x_4)$ une liste initiale de 4 entiers naturels. À chaque étape, on transforme cette liste :
$$(x_1, \ldots, x_4) \longrightarrow (|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_3 - x_4|, |x_4 - x_1|)$$
Montrer qu'après un certain nombre d'étapes, on tombe sur $(0, \ldots, 0)$.

Exercice 16 ★ On dispose de $2n+1$ cailloux, pour $n \geq 1$, ayant des poids entiers. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de n cailloux de même masse totale.

1. Montrer que les parités des masses des cailloux sont égales.
2. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.
3. Que dire si les poids ne sont plus entiers mais rationnels ?

II) Relations de récurrence sous forme de moyennes

1) Moyennes des précédents

Propriété – Principe de récurrence d'ordre 2. Pour montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$, il suffit de montrer

$$\mathcal{P}(0),\ \mathcal{P}(1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2).$$

Propriété – Théorème de la limite monotone. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors (u_n) converge, c'est-à-dire tend, quand $n \to +\infty$, vers une limite finie.

Propriété – Opérations sur les limites. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$, et $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée, c'est-à-dire majorée et minorée.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \max(u_n, u_{n+1}) \quad \text{et } w_n = \min(u_n, u_{n+1}).$$

- **a)** Montrer que (v_n) et (w_n) sont monotones.
- **b)** Montrer que (v_n) et (w_n) convergent.
- **c)** ★ Montrer que (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de (u_n). En considérant la suite $k_n = \frac{u_n}{2} + u_{n+1}$, déterminer ℓ en fonction de u_0 et u_1.

4. $\mathbb{T}^{\ell e}$ Expliciter la limite d'une suite (u_n) strictement positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

2) Moyennes prévisionnelles [CG 2015]

On considère des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On dit qu'une telle suite de type $\mathcal{M}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}}{n}.$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de type $\mathcal{M}$ et $C \in \mathbb{R}$. Que dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n - C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. Montrer que toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de type $\mathcal{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = an^2 + bn + c$. Montrer que $a = b = 0$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ à valeurs ≥ 0.
On fixe $r \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Soit $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers non nuls q, q' tels que $q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$.
  En déduire que $u_p \leq 3u_r$.
- **b)** Montrer que $u_p \leq 3u_r$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite type $\mathcal{M}$.

- **a)** On suppose que la suite (u_n) est minorée. Montrer qu'elle est bornée.
- **b)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_p - D$ est un minorant de $\mathcal{M}$, alors $u_p - \frac{2}{3}D$ l'est également.
  Indication : *Utiliser la question* ***4.****, appliquée à une autre suite judicieuse.*
- **c)** En déduire que si la suite (u_n) est minorée, elle est constante.
- **d)** Que dire si (u_n) est majorée ?

6. Existe-t-il une suite non constante de type $\mathcal{M}$?

III) Une énumération des rationnels [CG 2023]

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $v_2(n)$ le plus grand entier k tel que $\frac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v_2(n) - \frac{1}{u_{n-1}} \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Expliciter $v_2(1), v_2(2), v_2(3), v_2(4)$.

2. Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $v_2(n) = 0$ si n est impair et que $v_2(n) = v_2\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.

3. Vérifier que $u_8 = 4$.

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

5. Montrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.

6. Montrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.